



DELİKLİ İZOTROPİK LEVHALARDA TERMAL GERİLME ANALİZİ

(*THERMAL STRESS ANALYSIS IN ISOTROPIC PLATES WITH HOLE*)

Sami KAYA*, Behcet DAĞHAN*, Mesut UYANER**

ÖZET/ABSTRACT

Malzeme davranışlarını etkileyen önemli faktörlerden birisi de sıcaklıktır. Her malzemenin sıcaklığa karşı davranışı farklılık arz eder. Dolayısıyla aynı şartlarda çalışan farklı malzemeden yapılmış makine elemanlarının da sıcaklıktan dolayı davranışları farklı olacaktır. Dış ortam sıcaklığının veya çalışma sıcaklıklarının değişmesi, makine elemanlarında istenmeyen gerilmelerin oluşmasına sebep olabilir. Sıcaklık değişimlerinden dolayı makine elemanlarında meydana gelebilecek istenmeyen gerilmeleri elimine etmek için gerekli incelemeler yapılmalı ve uygun konstrüksiyonlar oluşturulmalıdır. Makine elemanı üzerine delikler açılarak veya sınır şartları uygun şekilde seçilerek istenmeyen gerilmeler düşürülebilir. Bu çalışmada malzeme üzerine açılan deliklerin sıcaklık değişiminden doğan gerilmeleri nasıl etkilediği incelenmiştir. Nümerik çözümlerin elde edilmesinde ANSYS sonlu elemanlar paket programı kullanılmıştır.

One of the important factors that affect the behavior of the engineering material is temperature. Every material has a different response to temperature changes. Because of this fact machine elements' behavior related to temperature changes is also different. Outside temperature and working temperature variations results in some undesired stresses. For eliminating these stresses necessary researches must be realized and suitable constructions have to be designed. In this study, effects of the hole on the stresses due to the temperature variations are examined. Numerical solutions are obtained by utilizing ANSYS finite element software.

ANAHTAR KELİMELELER/KEYWORDS

Termal gerilme, Levhalar, Sonlu elemanlar yöntemi
Thermal stress, Plates, Finite element method

*Selçuk Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fak., makine Mühendisliği Bölümü, KONYA

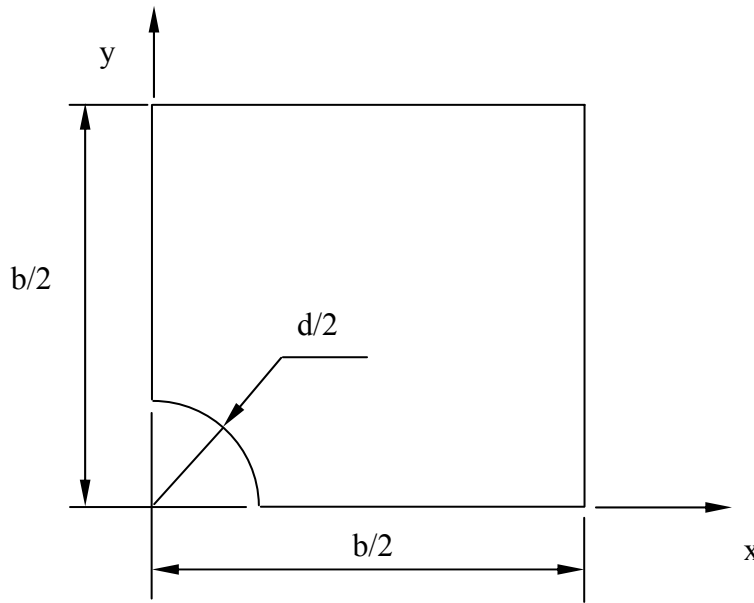
**Selçuk Üniversitesi, Sarayönü Meslek Yüksek Okulu, Sarayönü, KONYA

1. GİRİŞ

Malzemeler genellikle metaller, seramikler ve organik malzemeler olarak üç ana gruba ayrılırlar. Bu üç grubun birbirlerine göre üstün ve zayıf yönleri vardır. İzotropik malzemelerde malzeme özellikleri her yönde aynı olduğundan sıcaklık malzemeyi her yönde düzgün olarak etkiler. Herhangi bir makine elemanının sıcaklıktan dolayı boyutlarında meydana gelecek değişim, makine elemanının ilk boyutu ve sıcaklık farkıyla orantılıdır. Termal şekil değiştirmeler de (ε^{th}) sıcaklık artışı ile doğru orantılıdır. ε^{th} , malzemenin termal genleşme katsayısı α ve sıcaklık farkı ΔT 'nin çarpımına eşittir.

$$\varepsilon^{th} = \alpha \Delta T \quad (1)$$

Bu çalışmada izotropik kare bir levha ele alınarak levhanın delikli ve deliksiz durumu incelenmiştir. Delikler daire şeklinde ve levhanın merkezine açılmıştır. Delik çapının levha genişliğine oranı $d/b=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ve 0.5 alınarak incelemeler yapılmıştır. Levhanın tek yönde ve çift yönde basit mesnetlenmiş durumu ayrı ayrı incelenmiştir. Sıcaklığın malzemenin her tarafına düzgün olarak etki ettiği varsayılmıştır. Malzeme izotropik ve simetrik olduğundan levhanın $1/4$ 'ü ele alınarak hesaplamalar yapılmıştır. Bu çalışmada



Şekil 1. Sıcaklık uygulanan delikli kare levhanın $1/4$ 'ü

Çizelge 1. İncelenen izotropik levha malzemesinin mühendislik sabitleri

| Malzeme | E (GPa) | G (GPa) | ν | α ($1/^\circ\text{C}$) | σ_{Ak} (MPa) |
|---------|-----------|-----------|-------|---------------------------------|---------------------|
| Çelik | 208 | 80 | 0.3 | $1.17 (10^{-5})$ | 240 |

2. TERMAL GERİLMELERİN SONLU ELEMAN ANALİZİ

2.1. Gerilme-Şekil Değiştirme Bağlılıkları

Sıcaklıktan dolayı meydana gelen gerilmeler şekil değiştirmelere bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Ansys, 1992; Kaya ve Avcı, 1997).

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^{th}\}) \quad (2)$$

Burada

$\{\sigma\}=[\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{xz}]^T$: gerilme vektörünü,

$[D]$: elastisite matrisini,

$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}]^T$: şekil değiştirme vektörünü,

$\{\varepsilon^{th}\}$: termal şekil değiştirme vektörünü göstermektedir.

Üç boyutlu durumda termal şekil değiştirme vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\{\varepsilon^{th}\}=\Delta T[\alpha_x \alpha_y \alpha_z 0 0 0]^T \quad (3)$$

Burada

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$: sırasıyla x, y, z yönlerindeki termal genişleme katsayılarını,

$\Delta T=T-T_{REF}$: sıcaklık farkını,

T : ortam sıcaklığını,

T_{REF} : referans sıcaklığını göstermektedir. İzotropik malzemelerde $[D]^{-1}$ matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.2. Bünye Denklemleri

Virtüel iş prensibine göre dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş, şekil değiştirme enerjisindeki virtüel değişmeye eşittir.

$$\delta U = \delta V \quad (5)$$

Burada

U : şekil değiştirme enerjisi (iç enerji) ($=U_1+U_2$),

V : dış kuvvetlerin yaptığı iş ($=V_1+V_2+V_3$),

δ : virtüel operatörü göstermektedir.

Virtüel şekil değiştirme enerjisi ise

$$\delta U_1 = \int_{vol} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d(vol) \quad (6)$$

olarak verilir. Burada

$\{\varepsilon\}$: şekil değiştirme vektörünü,

$\{\sigma\}$: gerilme vektörünü,

vol: eleman hacmini göstermektedir. Malzemenin lineerlik ve geometri özelliklerinden hareketle Eşitlik 5 ile Eşitlik 6 birleştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\delta U_1 = \int_{vol} \left(\{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} - \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon^{th}\} \right) d(vol) \quad (7)$$

Düğüm noktalarındaki şekil değiştirmeler ise

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\} \quad (8)$$

olarak verilir. Burada

$[B]$: şekil değiştirme-deplasman matrisi,

$\{u\}$: düğüm noktalarının deplasman vektörü olarak tanımlanmaktadır. Eşitlik 7 ile Eşitlik 8 birleştirilerek

$$\delta U_1 = \{\delta u\}^T \int_{vol} [B]^T [D] [B] d(vol) \{u\} - \{\delta u\}^T \int_{vol} [B]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} d(vol) \quad (9)$$

eşitliği elde edilir. Yayılı dirence karşı hareket eden bir yüzey olduğu zaman virtüel şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi verilir.

$$\delta U_2 = \int_a \{\delta w_n\}^T \{\sigma\} d(a) \quad (10)$$

Burada

$\{w_n\}$: yüzeye dik hareket,

$\{\sigma\}$: yüzeyde oluşan gerilme,

a: yayılı direnç dağılım alanını ifade etmektedir.

$\{w_n\}$ ve $\{\sigma\}$ daima sıfırdan farklı bir değere sahiptir. Bir noktanın dik yer değiştirmeleri, düğüm noktaları yer değiştirmelerine bağlı olarak aşağıdaki gibi verilir.

$$\{w_n\} = [N_n] \{u\} \quad (11)$$

Burada $[N_n]$, yüzeydeki dik hareket için şekil fonksiyonları matrisidir. Gerilme $\{\sigma\}$ ise aşağıdaki gibi verilir.

$$\{\sigma\} = k \{w_n\} \quad (12)$$

Burada k , birim alandaki birim uzunluğa etki eden birim yükün alan rijitliğidir. k 'nın alan üzerinde sabit olduğu kabulü ile Eşitlik 10, 11 ve Eşitlik 12 birleştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\delta U_2 = \{\delta u\}^T k \int_{a_f} [N_n]^T [N_n] d(a_f) \{u\} \quad (13)$$

Dış kuvvetlerin yapmış olduğu virtüel iş ise

$$\delta V_1 = - \int_{vol} \{\delta w\}^T \frac{\{F^a\}}{vol} d(vol) \quad (14)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$\{w\}$: herhangi bir noktanın yer değiştirme vektörü,

$\{F^a\}$: ivme kuvvet vektörüdür. Newton'un ikinci kanununa göre kuvvet aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\{F^a\}}{vol} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{w\} \quad (15)$$

Burada

ρ : yoğunluğu

t : zamanı göstermektedir. Bir elemanın yer değiştirmeleri düğüm noktalarının yer değiştirmelerine bağlı olarak

$$\{w\} = [N] \{u\} \quad (16)$$

şeklinde yazılır. Burada $[N]$ şekil fonksiyonları matrisidir. Eşitlik 14, 15 ve Eşitlik 16 birleştirir ve ρ 'nun hacim üzerinde sabit olduğu kabul edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\delta V_1 = - \{\delta u\}^T \rho \int_{vol} [N]^T [N] d(vol) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (17)$$

Basınç kuvvet vektörü de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\delta V_2 = \int_{a_p} \{\delta w_n\}^T \{P\} d(a_p) \quad (18)$$

Burada

$\{P\}$: uygulanan kuvvet vektörü,

a_p : kuvvetin etki ettiği alandır. Eşitlik 17 ile Eşitlik 19 birleştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\delta V_2 = \{\delta u\}^T \int_{a_p} \{N_n\}^T \{P\} d(a_p) \quad (19)$$

Elemanların düğüm noktalarına uygulanan kuvvetler aşağıdaki eşitlikle belirlenir.

$$\delta V_3 = \{\delta u\}^T \{F_e^{nd}\} \quad (20)$$

Burada $\{F_e^{nd}\}$ elemanların düğüm noktalarına uygulanan kuvvetlerdir. Elemanların gerilme analizi için bütün malzeme özellikleri her bir elemanın ortalama sıcaklığında alınmıştır. Sonuç olarak Eşitlik 5, 9, 13, 17, 19 ve Eşitlik 20 birleştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \{\delta u\}^T \int_{vol} [B]^T [D][B] d(vol) \{u\} - \{\delta u\}^T \int_{vol} [B]^T [D][e^{th}] d(vol) \\ & + \{\delta u\}^T k \int_{a_f} [N_n]^T [N_n] d(a_f) \{u\} \\ & = -\{\delta u\}^T \rho \int_{vol} [N]^T [N] d(vol) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \{\delta u\}^T \int_{a_p} [N_n]^T \{P\} d(a_p) + \{\delta u\}^T \{F_e^{nd}\} \end{aligned} \quad (21)$$

Yukarıda bütün terimlerde ortak olan virtüel yer değiştirme vektörü $\{\delta u\}^T$, ne göre Eşitlik 21 tekrar düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$([K_e] + [K_e^f]) \{u\} - \{F_e^{th}\} = [M_e] \{\ddot{u}\} + \{F_e^{pr}\} + \{F_e^{nd}\} \quad (22)$$

Burada

$$[K_e] = \int_{vol} [B]^T [D][B] d(vol): \text{ eleman rijitlik matrisi,}$$

$$[K_e^f] = k \int_{a_f} [N_n]^T [N_n] d(a_f): \text{ eleman alan rijitlik matrisi,}$$

$$[F_e^{th}] = \int_{vol} [B]^T [D][e^{th}] d(vol): \text{ eleman termal yük vektörü,}$$

$$[M_e] = \rho \int_{vol} [N]^T [N] d(vol): \text{ eleman kütle matrisi,}$$

$$\{\ddot{u}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\}: \text{ ivme vektörü,}$$

$$[F_e^{pr}] = \int_{a_p} [N_n]^T \{P\} d(a_p): \text{ eleman basınç vektörüdür. Bir elemanın entegrasyon}$$

noktalarındaki gerilme ve şekil değiştirmeleri aşağıdaki eşitliklerle hesaplanır.

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon^{el}\} \quad (23)$$

$$\{\varepsilon^{el}\} = [B] \{u\} - \{\varepsilon^{th}\} \quad (24)$$

Burada $\{\varepsilon^{el}\}$, elemanda meydana gelen şekil değiştirmeleri göstermektedir.

3. SONUÇLAR

Yapılan çözümlerde Çizelge 1’de malzeme özellikleri verilen izotropik malzeme kullanıldı. Öncelikle deliksiz bir levha için tek yönde sınırlandırılmış bir durumda analitik ve sonlu elemanlar çözümü yapılarak karşılaştırma yapıldı. Analitik yolla ve sonlu elemanlarla elde edilen sonuçların % 100’e yakın bir uyum içinde olduğu görüldü. Daha sonra levhanın delik çapı oranı $d/b=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ve 0.5 alınarak tek yönde ve çift yönde sınırlandırılmış bir levhada $\Delta T = 1$ °C sıcaklık farkında eşdeğer gerilme ($\bar{\sigma}$) dağılımları elde edilerek Şekil 2 ve Şekil 3’te verildi. Burada eşdeğer gerilme ($\bar{\sigma}$) Von-Mises gerilmesidir.

$d/b=0.1$ olduğu hal için σ_{max}/σ_o oranının yaklaşık 2 civarında olduğu ve delik çapının artışına paralel olarak azaldığı görülmektedir. Burada σ_{max} sıcaklığa maruz delikli levhada meydana gelen maksimum gerilme ve σ_o sıcaklığa maruz deliksiz levhada meydana gelen gerilmedir. Aynı şekilde σ_{min}/σ_o değerinin de 0.98 civarında olduğu ve delik çapının artışına paralel olarak azaldığı görülmektedir. Burada σ_{min} sıcaklığa maruz delikli levhada meydana gelen minimum gerilmedir. Şekil 2 ve Şekil 3 incelendiği zaman d/b oranının küçük değerlerinde σ_{max} değerlerinin delik bölgesinde hem büyük olduğu hem de yığılma gösterdiği görülmektedir. Delik çapının artmasıyla da hem maksimum gerilmeler düşmekte hem de gerilmeler levhanın iç bölgelerine doğru yayılmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken husus malzemede kalıcı deformasyonların oluşmamasıdır. Bunun için $\sigma_{max}/\sigma_{Ak=1}$ şartı sağlanmalıdır. $\sigma_{max}/\sigma_{Ak=1}$ şartını sağlayan kritik sıcaklıklar tek yönde ve çift yönde sınırlandırılmış levha için d/b oranına bağlı olarak Çizelge 2 ve Çizelge 3’te verilmiştir.

Çizelge 2. Çift yönde sınırlandırılmış bir levhada kritik sıcaklıkların d/b oranına göre değişimi

| d/b | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|----------------------|----|-------|-------|-------|-------|-----|
| ΔT_{cr} (°C) | 69 | 33.85 | 35.73 | 38.32 | 41.33 | 44 |

Çizelge 3. Tek yönde sınırlandırılmış bir levhada kritik sıcaklıkların d/b oranına göre değişimi

| d/b | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|----------------------|------|-------|-------|-------|-------|------|
| ΔT_{cr} (°C) | 98.6 | 34.24 | 35.79 | 37.96 | 40.46 | 42.4 |

Çizelge 2 ve Çizelge 3 incelendiği zaman $d/b=0$ için kritik sıcaklıklar arasında bariz bir fark görülürken delikli durumda kritik sıcaklıklar arasındaki farkların kayda değer oranda olmadığı ve d/b oranının artmasıyla kritik sıcaklıkların da arttığı görülmektedir.

KAYNAKLAR

- ANSYS™ “The General Purposed Finite Element Software Ver. 5.4 Users Manual”, Swanson Analysis System Inc Vol. I, II, III, IV.
- Kaya S., Avcı A. (1997): “Delikli Kompozit Levhalarda Mekanik ve Termal Burkulma”, Doktora Tezi, Selçuk Üni., Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.