

## İnce Bir Çubuğun Belirsiz Doğal Frekanslarının Çokterimli Kaos Açılımı ile Matematiksel Olarak Modellenmesi

Murat KARA \*1, Abdullah SEÇGİN<sup>2</sup>

Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 35397, İzmir

<sup>1</sup>(ORCID: 0000-0001-5798-9014)

<sup>2</sup>(ORCID: 0000-0002-1896-7629)

(Alınış / Received: 06.02.2018, Kabul / Accepted: 18.04.2018,  
Online Yayınlanma / Published Online: 15.09.2018)

**Anahtar Kelimeler**  
Çokterimli Kaos  
açılımı,  
Belirsiz ince  
çubuk,  
Ayrık Tekil  
Konvolüsyonu,  
Doğal frekans

**Özet:** Belirsizlik genellikle dinamik cevaplardaki kontrol edilemeyen değişkenlikler olarak tanımlanır. Bu çalışma, belirsiz elastisite modülü ve özgül hacme sahip ince bir çubuğun belirsiz doğal frekanslarının matematiksel olarak modellenmesini içerir. Belirsiz değişkenlerin ötelenmiş Normal dağılıma sahip olduğu kabul edilmiştir. Belirsiz değişkenler ve bu değişkenlere karşılık gelen belirsiz doğal frekanslar çok terimli kaos (ÇKA) ile modellenmiştir. Çokterimli tipi olarak Hermite çokterimli seçilmiştir. Ayrık tekil konvolüsyonu (ATK) diferansiyel denklem çözücü olarak kullanılmış ve ATK'nın doğal frekansların ÇKA katsayılarını belirlemede oldukça avantajlı olduğu görülmüştür. Çubuğun ilk otuz doğal frekansı göz önüne alınarak her bir doğal frekans için farklı ÇKA katsayıları elde edilmiştir. Doğrulama çalışması için Monte Carlo simülasyonu gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar, ATK ile ÇKA uygulamasının Monte Carlo simülasyonuna oldukça güçlü bir alternatif olduğunu göstermektedir.

## Mathematical Modeling of Uncertain Natural Frequencies of a Thin Beam via Polynomial Chaos Expansion

**Keywords**  
Polynomial Chaos  
Expansion,  
Uncertain thin  
beam,  
Discrete Singular  
Convolution,  
Natural frequency

**Abstract:** Uncertainty is generally defined as uncontrollable variability in the dynamic responses. This study introduces mathematical modeling of uncertain natural frequencies of a thin beam having uncertain elasticity modulus and specific volume. The uncertain variables are assumed to have shifted normal distribution. The uncertain variables and the uncertain natural frequencies corresponding to the uncertain variables are modeled via polynomial chaos expansion (PCE). Hermitian polynomials are selected as polynomial type. Discrete singular convolution method (DSC) is utilized to solve differential equation solver and it is seen that DSC presents a unique advantage in determining PCE coefficients of natural frequencies. First thirty natural frequencies of the beam are considered and different PCE coefficients are obtained for each natural frequency. Monte Carlo simulation is performed for the validation. Results show that PCE application via DSC is a powerful alternative to Monte Carlo simulation.

\*Sorumlu yazar: kara.murat@deu.edu.tr

## 1. Giriş

Bir ürünün tasarım sürecinde yapılan vibro-akustik analizlerde belirsizlik adı verilen olgunun göz önüne alınması gereklidir. Belirsizlik, genellikle malzemenin iç yapı farklılıkları, sönüm ve geometrideki farklılıklar, ilk ve sınır şartlarındaki oynaklıklar gibi kontrol edilemeyen değişiklikler sonucu aynı ürünün farklı örneklemelerinin farklı vibro-akustik özellikler göstermesi olarak tanımlanır. Güvenilir analizler için bu belirsizlikler üretimin her aşamasında hesaba katılmalıdır. Bu bağlamda, dinamik sistemlerin belirsizliği uygun bir istatistiksel yaklaşım ile modellenmelidir.

Literatürde belirsizliklerin hesaplanması için birçok çalışma bulunmaktadır. Elishakoff ve ark. [1] belirsizlik analizlerinde olasılıksal ve olasılıksal olmayan yöntemlerin olduğunu belirtmişlerdir ve belirsizliğe sahip bir kafes sistemi problemini olasılıksal olmayan en kötüleştirme (anti-optimizasyon) yöntemi ile çözmüşlerdir. Bu yöntemde yalnızca belirsiz parametrelerin sınırlarının bilinmesi durumunda yük kombinasyonlarına göre kafes sistemini oluşturan elemanların kesit alanlarını belirlemişlerdir. Aralık analizi [2] ve bulanık analiz [3,4] diğer olasılıksal olmayan yöntemlerden bazılarıdır.

Olasılıksal yöntemlerde ise, belirsiz parametrelerin dağılım tipi ve istatistiksel özelliklerinin bilinmesi durumunda sistem cevabı olasılık teorisi kullanılarak belirlenir. Literatürde birçok olasılıksal yöntem olmasına rağmen Monte Carlo simülasyonu [5,6] tabanlı sayısal analizler en çok kullanılan tekniklerden biridir. Fakat bu yöntemde hesaplama sürelerinin uzunluğu ve hafıza kullanımının artması nedeniyle alternatif olasılıksal yöntemler araştırılmaktadır. Başka bir olasılıksal

yöntem olan İstatistiksel Enerji Analizi [7] ise oldukça kısa sürelerde hesaplamalar yapabilmektedir. Fakat bu teknik ile birçok kabul ve kısıtlamalar nedeni ile yalnızca yüksek frekanslarda titreşen yapıların analizleri doğru olarak yapılmaktadır.

Çokterimli kaos açılımı (ÇKA) yöntemi [8-10] belirsiz dinamik sistemlerin analizinde kullanılabilen bir başka olasılıksal yöntemdir. Bu yöntemde, belirsiz değişkenlerin dağılımları uygun bir sabit katsayılı çokterimli ile modellenir. Bu nedenle bu yöntem, diğer belirsizlik analizi yapabilen tekniklerin yapamadığı belirsizliğin matematiksel modelini ortaya koyabilmektedir. Ayrıca yöntemin, sonlu elemanlar [8] ve sonlu farklar analizi [9] gibi deterministik teknikler ile birlikte kullanılabilmesi bir diğer avantajıdır. Fakat bu yöntemde uygun olmayan dağılım-çok terimli ikilisi seçilmesi durumunda yüksek dereceli terimlerin sifıra yakınsamaması nedeniyle hesaplama süreleri oldukça uzamaktadır.

Bu çalışmada, belirsiz elastisite ve özgül hacme sahip ince çubuğun belirsiz doğal frekansları ÇKA yöntemi ile belirlenmiştir. Belirsiz değişkenlerin ötelenmiş normal dağılıma sahip olduğu kabul edilmiştir ve bu değişkenler Hermite çokterimlileri ile ifade edilmiştir. Diferansiyel denklemin çözümünde ayrık tekil konvolüsyonu (ATK) [11-17]. Böylelikle bu çalışma ile ilk defa ÇKA katsayıları, ATK kullanılarak belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak ATK ile yapının karakteristik matrisin bir defa elde edilmesi ile belirsiz doğal frekanslarının ÇKA yöntemi kullanılarak başarılı bir şekilde elde edildiği görülmüştür.

## 2. Matematiksel Bağlılıklar

### 2.1. Belirsiz bir ince çubuğunun kısmi diferansiyel denklemi

İnce bir çubuğun harmonik serbest eğilme titreşimi [18],

$$Er \frac{I_z}{A} W^{(IV)}(x) - \omega_n^2 W(x) = 0, \quad (1)$$

ile ifade edilir. Burada,  $r$  çubuğun özgül hacmi (yoğunluğun tersi),  $E$  elastisite modülü,  $A$  çubuğun kesit alanı,  $I_z$  z eksenindeki alan atalet momenti,  $W$  çubuğun titreşim genliği, üst indis (IV) titreşim genliğinin uzam değişkeni olan  $x$ 'e göre 4. dereceden türevi ve  $\omega_n$  ise çubuğun doğal frekansıdır. Basit mesnetli bir çubuk için doğal frekanslar analitik olarak [18],

$$\omega_n = (k\pi)^2 \sqrt{\frac{Er I_z}{AI^4}}, \quad k=1,2,3\dots \quad (2)$$

ile ifade edilir. Burada,  $l$  çubuğun uzunluğudur. Bu çalışmada, elastisite modülü ve özgül hacmin birbirinden bağımsız olarak belirsiz değişken olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda, Denklem (1) şu şekilde yazılabilir:

$$E(\xi_1)r(\xi_2)\frac{I_z}{A}W^{(IV)}(x,\xi_1,\xi_2) - \omega_n^2(\xi_1,\xi_2)W(x,\xi_1,\xi_2) = 0 \quad (3)$$

Burada,  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  elastisite modülü ve özgül hacmi etkileyen belirsiz parametrelerdir.

### 2.2. Belirsiz ince çubuk için Ayrık Tekil Konvolüsyonu (ATK)

ATK algoritmasına göre, bir fonksiyon ve onun  $n$ . dereceden türevi şu şekilde ifade edilebilir [11]:

$$W_i^{(n)} \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\alpha,\Delta}^{(n)}(x_i - x_k) W_{i+k} \quad (4)$$

Burada,  $M$  bant genişliği,  $x_k$  düzgün dağıtılmış ayrıklaştırılmış noktalar,  $\delta_{\alpha,\Delta}^{(n)}(x_i - x_k)$  ise Dirichlet tipli ATK çekirdeğidir. Literatürde birçok ATK çekirdeği bulunmasına rağmen, düzenlenmiş Shannon delta çekirdeği bu çalışmada kullanılmıştır [19]:

$$\delta_{\alpha,\beta}^{(n)}(x_i - x_k) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left( \frac{\sin(\alpha(x - x_k))}{\alpha(x - x_k)} \right) \cdot \exp\left(-\frac{(x - x_k)^2}{2\beta^2}\right) \Big|_{x=x_i} \quad (5)$$

Burada,  $\alpha = \pi/\Delta$  Nyquist frekansı,  $\Delta = L/(N-1)$  ayrıklaştırılmış noktalar arasındaki mesafe,  $N$  ayrık nokta sayısı ve  $\beta = (N/10 + 1)\Delta$  'dır. Sadeleştirme amacıyla, Denklem (4) şu şekilde ifade edilebilir:

$$W_i^{(n)} \approx \sum_{k=-M}^M C_k^{(n)} W_{i+k} \quad (6)$$

Denklem (6)'nın Denklem (3)'de yerine koyulması ile her bir ayrık nokta için şu denklem elde edilir:

$$E(\xi_1)r(\xi_2)\frac{I_z}{A}\sum_{k=-M}^M C_k^{(4)}W(x,\xi_1,\xi_2) - \omega_n^2(\xi_1,\xi_2)W(x,\xi_1,\xi_2) = 0 \quad (7)$$

Denklem (7)'ye sınır koşulu uygulanmasının ardından ince çubuğun doğal frekansları, şu denklemin çözülmesi ile elde edilir:

$$\left| E(\xi_1)r(\xi_2)\frac{I_z}{A}D^{(4)} - \omega_n^2(\xi_1,\xi_2)I \right| = 0 \quad (8)$$

Burada,  $D^{(4)}$   $N \times N$  boyutlu dördüncü dereceden ATK karakteristik matrisi,  $I$

ise birim matristir. ATK ile sınır koşulu uygulamaları için literatürdeki [16,17,20,21] çalışmaları incelenebilir.

Burada,  $p$  çok terimlinin derecesi,  $m$  ise belirsiz parametrenin boyutudur, örneğin  $m=2$  ise  $\xi = [\xi_1, \xi_2]$ .

### 2.3. Çokterimli Kaos Açılımı (ÇKA)

ÇKA'na göre, belirsiz bir değişken ( $Y$ ) birbirine dik çokterimliler cinsinden şu şekilde ifade edilebilir [8-10]:

$$Y = y_0 \psi_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} y_{i_1} \psi_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} y_{i_1 i_2} \psi_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} y_{i_1 i_2 i_3} \psi_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) + \dots \quad (9)$$

veya basitçe

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \psi_i(\xi). \quad (10)$$

Burada,  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i_n}]$ , belirsiz değişkeni ( $Y$ ) etkileyen belirsiz parametrelerden oluşan vektördür.  $y_i$ , çok terimlilerin deterministik katsayıları ve  $\psi_i(\cdot)$  ise birbirine dik çok terimlilerdir. Çok terimliler birbirine dik olduğundan,

$$\langle \psi_i \cdot \psi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ise} \\ \langle \psi_i^2 \rangle, & i = j \text{ ise} \end{cases} \quad (11)$$

Burada,  $\langle \cdot \rangle$  çok terimlilerin ortalamasını gösterir. Denklem (10)'da görüldüğü ÇKA sonsuz terimlidir. Sayısal çalışmalarda, seriyi sonlu bir değerde ( $N_{PC}$ ) sonlandırmak anlamlı olacaktır:

$$N_{PC} = \frac{(m+p)!}{m!p!}. \quad (12)$$

ÇKA'nda bilinmeyen deterministik katsayılar,  $y_i$ , Galerkin iz düşümü (ilgilenilen denklemi temel (basis) fonksiyon ile çarpma olarak tanımlanabilir) ile belirlenir [8]:

$$y_i = \frac{1}{\langle \psi_i^2 \rangle} \int_{\Omega} \langle Y, \psi_k(\xi) \rangle d\mu(\xi), \quad (13)$$

burada,  $d\mu(\xi)$  rastgele değişken uzayını ( $\Omega$ ) olasılığıdır ve  $k=0,1,2,3,\dots$ . Eğer belirsiz değişken çok boyutlu ise, Denklem (13) çok katlı integral ile ifade edilir:

$$y_i = \frac{1}{\langle \psi_i^2 \rangle} \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_m} \langle Y, \psi_k(\xi) \rangle d\mu_m(\xi_m) \dots d\mu_1(\xi_1) \quad (14)$$

ÇKA'nda Hermite çok terimlileri fonksiyon seti,  $\psi_i$ , olarak kullanılabilir:

$$H_i(\xi) = (-1)^i e^{\frac{1}{2}\xi^T \xi} \frac{\partial^i}{\partial \xi_{i_1} \partial \xi_{i_2} \dots \partial \xi_{i_n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \quad (15)$$

ÇKA ile belirsizlik analizlerinde, belirsiz parametrenin her bir dağılım tipine göre en uygun çok terimli temeli vardır, örneğin; Normal dağılım için Hermite çok terimlisi, Gamma dağılımı için Laguerre çok terimlisi, Beta dağılımı için Jacobi çok terimlisi, düzgün (tek biçimli) dağılım için Legendre çok terimlisi [10]. Burada verilen örneklerde verilen çok terimli tipinin ağırlık fonksiyonları dağılımın matematiksel formu ile benzerdir. Eğer bir belirsiz değişken yukarıda belirtilen dağılım tipine göre en uygun çok terimli ile ifade edilirse bu durum optimum gösterim olarak isimlendirilir ve bu durumda belirsiz değişken oldukça az sayıda çok terimli katsayısı ile ifade edilebilir ( $N_{PC}=1$ ). Optimum ÇKA'nda,

[a,b] aralığında belirsiz parametre  $\xi$ , [c,t] aralığındaki belirsiz değişkeni ifade etmekte kullanılırsa, belirsiz parametre şu şekilde ötelenmelidir:

$$\int_c^y \rho_1(u) d\tau = \int_a^\xi \rho_2(u) d\tau, \quad (16)$$

Burada,  $\rho$  olasılık dağılım fonksiyonunu gösterir. Denklem (16) düzenlendiğinde,

$$Y = f(\xi), \quad (17)$$

elde edilir. Bunun yanında, herhangi bir dağılım herhangi bir çokterimli ile ifade edilebilir. Bu durumda, açılım, optimum olmayan ÇKA olarak isimlendirilir ve bu durumda belirsiz değişken çok sayıda terim ile ifade edilir ( $N_{pc} > 1$ ) ve hesaplama süreleri oldukça artar ve ÇKA katsayıları sıfıra yakınsamaz.

### 3. Sayısal Çalışmalar

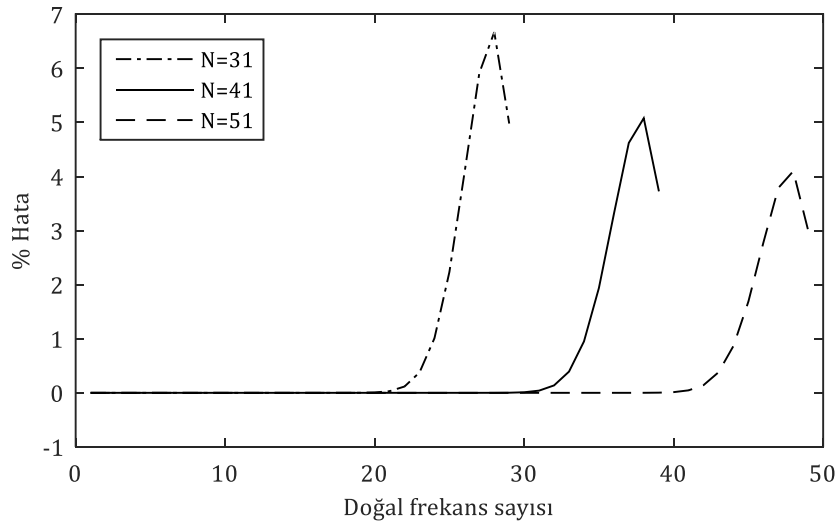
Bu bölümde, ince çubuğun belirsiz doğal frekansları ÇKA ile matematiksel olarak ifade edilmiştir. ATK kısmi diferansiyel

denklemler çözümü olarak kullanılmıştır. Bu bağlamda, ilk olarak ATK yönteminin doğrulaması Bölüm 3.1'de yapılmıştır. Daha sonra, belirsiz değişkenler, elastisite modülü ve özgül hacim, Bölüm 3.2'de ayrıca belirsiz doğal frekanslar Bölüm 3.3'de ÇKA ile modellenmiştir. İncelenen çubuğun kesit alanı  $A=10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ , uzunluğu  $10 \text{ m}$ , ortalama özgül hacmi,  $r=3.7176 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$  ve ortalama elastisite modülü  $68 \text{ GPa}$ 'dır.

#### 3.1. ATK yönteminin doğrulaması

Bu bölümde, ATK yönteminin doğruluğu doğal frekansların hesaplanarak analitik sonuçlar ile karşılaştırılması ile gösterilmiştir. Bu bağlamda, ATK ile basit mesnetli bir çubuğun doğal frekansları farklı ayrıklama sayıları ( $N$ ) için elde edilmiştir. Şekil 1'de farklı ayrıklama sayıları için elde edilen doğal frekansların

$\% \text{error} = (\omega_{DSC} - \omega_{an}) / \omega_{an} \times 100$  ile hesaplanan analitik sonuçlardan sapma miktarı gösterilmiştir.



Şekil 1. Farklı ayrıklama sayılarına göre doğal frekansların % hata eğrileri

Şekil 1'de görüldüğü gibi ayrıklama frekanslar oldukça hassas olarak elde sayısından bağımsız olarak ilk doğal edilmiştir. Fakat analizlerde ilk 30 doğal

frekans (10000 Hz) göz önüne alınmıştır. Bu nedenle Şekil 1'de görülen hata değeri %1'den az olduğu için bundan sonraki analizlerde ayıklama sayısı  $N=41$  olarak seçilmiştir.

### 3.2. Elastisite modülü ve özgül hacmin optimum çok terimli kaos açılımı

İnce çubuğun elastisite modülü ve özgül hacmi belirsiz olarak seçilerek Normal dağılıma sahip olduğu kabul edilmiştir. Bu belirsiz değişkenler sırasıyla,

$$[\mu_E, \sigma_E] = [68; 0,05 \times 68] \times 10^9 \quad (18)$$

ve

$$[\mu_r, \sigma_r] = [3,7176; 0,05 \times 3,7176] \times 10^{-4} \quad (19)$$

özelliklerine sahip olduğu kabul edilmiştir. Burada,  $\mu$  ortalama değeri,  $\sigma$  standart sapmayı göstermektedir. Elastisite modülü ve özgül hacim sırasıyla  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  belirsiz parametreleri kullanılarak Hermite çok terimlisi ile ifade edilecektir. Belirsiz parametreler birbirine eş istatistiksel özelliklere ve  $[\mu_\xi, \sigma_\xi] = [0,1]$  ile ifade edilen Normal dağılıma sahip olduğu kabul edilmiştir. Elastisite modülü ve özgül hacim Bölüm 2.3'de bahsedildiği gibi ötelenmiş ve sırasıyla aşağıdaki verilen çok terimliler ile ifade edilmiştir:

$$E = \sum_{i=0}^1 E_i H_i(\xi_1) = 68 \times 10^9 + 34 \times 10^8 \xi_1 \quad (20)$$

ve benzer şekilde,

$$r = \sum_{v=0}^1 r_v H_v(\xi_2) = 3,7176 \times 10^{-4} + 0,18588 \times 10^{-4} \xi_2 \quad (21)$$

Görüldüğü gibi Normal dağılımlı bir belirsiz parametre uygun çok terimli tipi olan Hermite çok terimlileri ile

modellendiğinde yalnızca birinci dereceden çok terimli ile ifade edilebilmektedir.

### 3.3. Belirsiz doğal frekansların ÇKA ile belirlenmesi

Çubuğun doğal frekansları da elastisite modülü ve özgül hacim gibi ÇKA ile bir çok terimli gibi modellenebilir. Doğal frekansların karesi,  $\omega_n^2$ , (çubuğun öz değerleri,  $\Lambda_n$ ) ÇKA ile şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \sum_{j=0}^{N_\lambda} \lambda_j H_j(\xi_1 \otimes \xi_2) = \sum_{j=0}^{N_\lambda} \omega_{n,j}^2 H_j(\xi_1 \otimes \xi_2) \\ &= \omega_{n,0}^2 \mathbf{1} + \omega_{n,1}^2 \xi_1 + \omega_{n,2}^2 \xi_2 + \omega_{n,3}^2 \xi_1 \xi_2 \end{aligned} \quad (22)$$

Burada;  $H_j(\xi_1 \otimes \xi_2) = H_i(\xi_1) \otimes H_v(\xi_2)$ ;  $\otimes$ , tensör çarpımı ve  $\omega_{n,j}^2$ , doğal frekansın  $j$ . ÇKA katsayısının karesini göstermektedir. Denklem (20) ve (21) ikişer terime sahip olduğundan doğal frekansın çokterimli kaos açılımı, 4 (2x2) terimden oluşacaktır dolayısıyla Denklem (22)'de gösterilen seri açılımı sıfırdan başladığından  $N_\lambda = 3$  olacaktır. Yukarıda verilen Denklem belirsiz doğal frekansların matematiksel ifadesi olarak tanımlanır ve problem bu Denklemde yer alan  $\omega_{n,j}^2$  katsayılarının elde edilmesidir. Bu katsayılar, Denklem (20), (21) ve (22) Denklem (8)'de yerine yazıldığında,

$$\left| \begin{aligned} &\sum_{i=0}^1 E_i H_i(\xi_1) \sum_{v=0}^1 r_v H_v(\xi_2) \frac{I_z}{A} D^{(4)} + \dots \\ & - \sum_{j=0}^3 \omega_{n,j}^2 H_j(\xi_1 \otimes \xi_2) I \end{aligned} \right| = 0, \quad (23)$$

elde edilir. Denklem (23), ÇKA katsayılarının elde edilmesi amacıyla doğal frekansların temel fonksiyonu olan  $H_k(\xi_1 \otimes \xi_2)$  ile Galerkin iz düşümü yapıldığında,

$$\left| \sum_{i=0}^1 \sum_{v=0}^1 E_i r_v \frac{I_z}{A} e_{ivk} D^{(4)} - a_{n,k}^2 e_k^2 I \right| = 0 \quad (24)$$

elde edilir. Burada,  $k=0,1,2,3$ ,

$$e_{ivk} = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} H_i(\xi_1) H_v(\xi_2) H_k(\xi_1 \otimes \xi_2) \rho_1(\xi_1) \rho_2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (25)$$

ve

$$e_k^2 = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} [H_k(\xi_1 \otimes \xi_2)]^2 \rho_1(\xi_1) \rho_2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (26)$$

Çubuğun doğal frekanslarının ÇKA katsayıları Denklem (24)'ün her bir  $k$  değeri için çözülmesiyle elde edilir. Bunun yanında her bir doğal frekans için farklı ÇKA katsayıları elde edileceği açıktır. Her bir doğal frekans için hesaplanan ÇKA katsayıları Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1'de görüldüğü gibi ÇKA ile  $k=1$  ve  $k=2$  için elde edilen katsayılar birbirine eşittir. Bunun yanında, doğal frekans sayısının artmasıyla birlikte beklendiği gibi daha büyük ÇKA katsayıları elde edilmiştir. Denklem (24) çözülürken, Ayrık Tekil Konvolüsyonu (ATK) ile elde edilen  $D^{(4)}$  matrisinin her bir ÇKA katsayısı için yeniden hesaplanmamıştır. Bu durum  $D^{(4)}$  matrisinin malzeme özellikleri ve belirsiz değişkenlerden bağımsız olmasından kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla ATK ile ÇKA yöntemlerinin bir arada kullanılması ÇKA'nın sonlu elemanlar yöntemi ile birlikte kullanılmasına göre daha avantajlıdır. Ayrıca, belirsiz doğal frekanslar için ÇKA ile matematiksel bir bağıntı elde edildiği görülmektedir.

ÇKA katsayılarının hesaplanmasının ardından, bazı doğal frekansların (1, 2, 3,

10, 20 ve 30.) olasılık yoğunluk fonksiyonu (OYF) Şekil 2'de Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırılmıştır.

Şekil 2'de görüldüğü gibi, ÇKA ile elde edilen çok terimli kullanılarak hesaplanan OYF ile Monte Carlo simülasyonu sonuçları birbirleri ile oldukça uyumludur. Görülen küçük farklılıklar ise, Şekil 2 elde edilirken üretilen örneklemelerin farklı olmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca Monte Carlo simülasyonunda 10000 örneklem üretilirken, ÇKA ile yalnızca her iki belirsiz parametreden 50'şer adet örneklem üretilmiştir. Bu sebeple ÇKA çok daha az sayıda örneklem ile doğal frekansların dağılımlarını elde etmekte kullanılabilirliği görülmektedir.

#### 4. Tartışma ve Sonuç

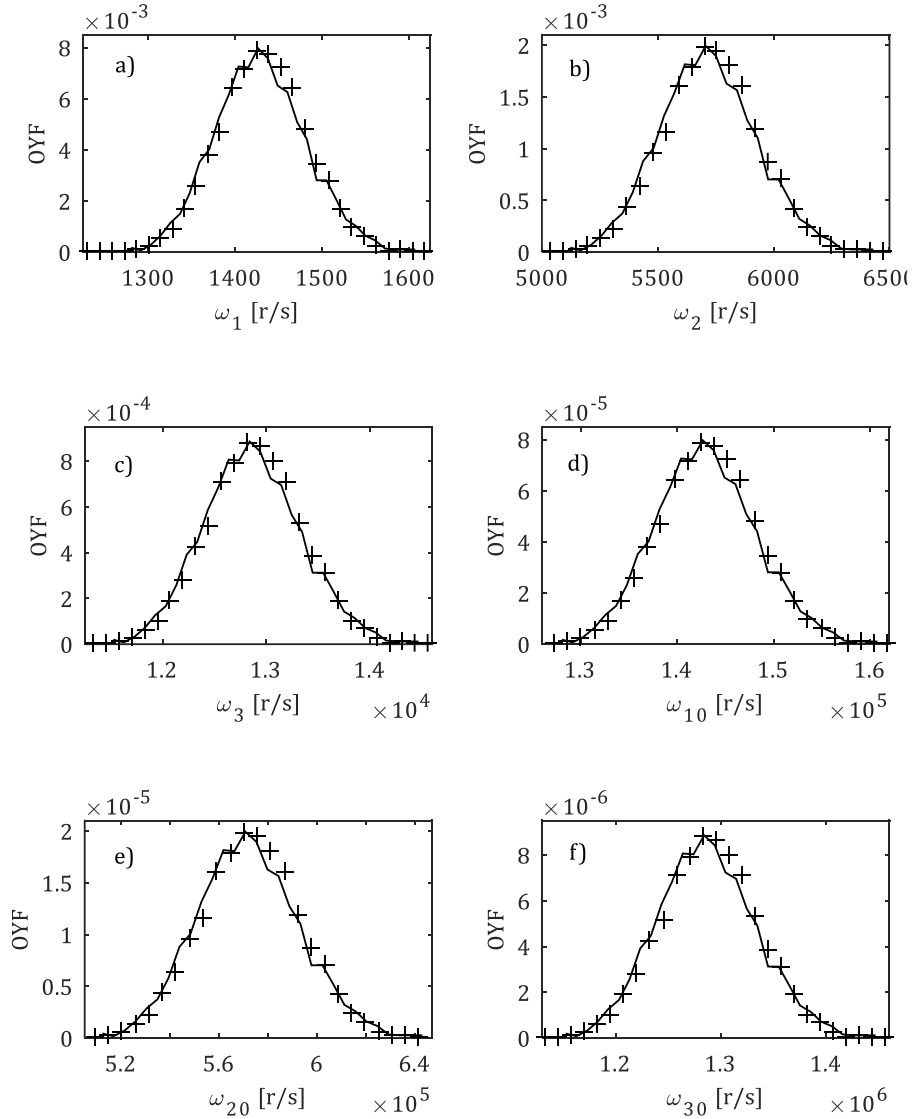
Bu çalışmada, Çokterimli Kaos Açılımı (ÇKA) bir ince çubuğunun belirsiz doğal frekanslarının bir çokterimli olarak ifade edilmesinde kullanılmıştır. Çubuğun elastisite modülü ve özgül hacmi normal dağılıma sahip belirsiz değişkenler olarak kabul edilmiş ve Hermite çok terimlileri ile ifade edilmiştir. Ayrık Tekil Konvolüsyonu (ATK) yöntemi diferansiyel denklemin çözümünde kullanılmıştır. ATK yöntemi ile ÇKA birlikte kullanıldığında her bir katsayı hesaplanırken çubuğun dördüncü dereceden türevini temsil eden karakteristik matrisin yeniden hesaplanmaması nedeniyle iyi bir avantaja sahip olduğu görülmüştür. ÇKA katsayıları ilk 30 doğal frekans için hesaplanmıştır. Bunun yanında, bazı doğal frekansların olasılık yoğunluk fonksiyonları (OYF) çizdirilmiş ve sonuçlar Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak ÇKA ile hesaplanan OYF, Monte Carlo simülasyonuna göre çok daha az sayıda örneklem kullanarak gerçekleştirildiği görülmüştür ve belirsiz doğal frekanslar,

belirsiz parametrelere bağlı olarak bir çokterimli olarak ifade edilmiştir.

**Tablo 1.** Doğal frekansların ÇKA katsayıları

Doğal frekans	$\omega_{n,0}$ [r/s]	$\omega_{n,1}$ [r/s]	$\omega_{n,2}$ [r/s]	$\omega_{n,3}$ [r/s]
1	1,4325E+03	320,3174	320,3174	71,6251
2	5,7300E+03	1,2813E+03	1,2813E+03	286,5006
3	1,2893E+04	2,8829E+03	2,8829E+03	644,6263
4	2,2920E+04	5,1251E+03	5,1251E+03	1,1460E+03
5	3,5813E+04	8,0079E+03	8,0079E+03	1,7906E+03
6	5,1570E+04	1,1531E+04	1,1531E+04	2,5785E+03
7	7,0193E+04	1,5696E+04	1,5696E+04	3,5096E+03
8	9,1680E+04	2,0500E+04	2,0500E+04	4,5840E+03
9	1,1603E+05	2,5946E+04	2,5946E+04	5,8016E+03
10	1,4325E+05	3,2032E+04	3,2032E+04	7,1625E+03
11	1,7333E+05	3,8758E+04	3,8758E+04	8,6666E+03
12	2,0628E+05	4,6126E+04	4,6126E+04	1,0314E+04
13	2,4209E+05	5,4134E+04	5,4134E+04	1,2105E+04
14	2,8077E+05	6,2782E+04	6,2782E+04	1,4039E+04
15	3,2231E+05	7,2071E+04	7,2071E+04	1,6116E+04
16	3,6672E+05	8,2001E+04	8,2001E+04	1,8336E+04
17	4,1399E+05	9,2572E+04	9,2572E+04	2,0700E+04
18	4,6413E+05	1,0378E+05	1,0378E+05	2,3207E+04
19	5,1713E+05	1,1563E+05	1,1563E+05	2,5857E+04
20	5,7300E+05	1,2813E+05	1,2813E+05	2,8650E+04
21	6,3173E+05	1,4126E+05	1,4126E+05	3,1587E+04
22	6,9333E+05	1,5503E+05	1,5503E+05	3,4667E+04
23	7,5779E+05	1,6945E+05	1,6945E+05	3,7890E+04
24	8,2512E+05	1,8450E+05	1,8450E+05	4,1256E+04
25	8,9531E+05	2,0020E+05	2,0020E+05	4,4766E+04
26	9,6837E+05	2,1653E+05	2,1653E+05	4,8419E+04
27	1,0443E+06	2,3351E+05	2,3351E+05	5,2215E+04
28	1,1231E+06	2,5113E+05	2,5113E+05	5,6154E+04
29	1,2048E+06	2,6939E+05	2,6939E+05	6,0238E+04
30	1,2894E+06	2,8832E+05	2,8832E+05	6,4469E+04





**Şekil 2.** Doğal frekansların olasılık yoğunluk fonksiyonları a) 1. doğal frekans, b) 2. doğal frekans, c) 3. doğal frekans, d) 10. doğal frekans, e) 20. doğal frekans, f) 30. doğal frekans (çizgi: ÇKA, +: Monte Carlo simülasyonu)

### Kaynakça

- [1] Elishakoff, I., Haftka, R.T., Fang, J. 1994. Structural design under bounded uncertainty—Optimization with anti-optimization, Computers & Structures, Cilt. 53, s. 1401–5. doi:10.1016/0045-7949(94)90405-7.
- [2] Moore, R.E. 1979. Methods and applications of interval analysis. 2nd, Siam.
- [3] Hanss, M. 2013. Fuzzy Arithmetic for Uncertainty Analysis. Springer, Berlin, Heidelberg, s. 235–40.
- [4] Kumar, V., Schuhmacher, M. 2005. Fuzzy uncertainty analysis in system modelling, Computer Aided Chemical Engineering, Cilt. 20, s.

- 391-6. doi:10.1016/S1570-7946(05)80187-7.
- [5] Evans, M., Swartz, T. 2000. Approximating Integrals via Monte Carlo and Deterministic Methods. OUP, Oxford.
- [6] Rubinstein, R.Y., Kroese, D.P. 2016. Simulation and the Monte Carlo Method. John Wiley & Sons.
- [7] Lyon, R., DeJong, R. 1995. Statistical Energy Analysis of Dynamics Systems: Theory and Applications. 2nd, MIT Press.
- [8] Ghanem, R.G., Spanos, P.D. 2003. Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach. Courier Corporation.
- [9] Sepahvand, K., Marburg, S., Hardtke, H-J. 2007. Numerical solution of one-dimensional wave equation with stochastic parameters using generalized polynomial chaos expansion, Journal of Computational Acoustics, Cilt. 15, s.579-93. doi:10.1142/S0218396X07003524.
- [10] Sepahvand, K., Marburg, S., Hardtke, H-J. 2010. Uncertainty quantification in stochastic systems using polynomial chaos expansion, International Journal of Applied Mechanics, Cilt. 2, s. 305-53. doi:10.1142/S1758825110000524.
- [11] Wei, G.W. 1999. Discrete singular convolution for the solution of the Fokker-Planck equation, The Journal of Chemical Physics, Cilt. 110, s.8930-42. doi:10.1063/1.478812.
- [12] Wei, G.W. 2000. Solving quantum eigenvalue problems by discrete singular convolution, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, Cilt.33, s.343-52. doi:10.1088/0953-4075/33/3/304.
- [13] Wei, G.W. 2001. A new algorithm for solving some mechanical problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Cilt.190, s. 2017-30. doi:10.1016/S0045-7825(00)00219-X.
- [14] Wei, G.W. 2001. Discrete singular convolution for beam analysis, Engineering Structures, Cilt. 23, s. 1045-53. doi:10.1016/S0141-0296(01)00016-5.
- [15] Wei, G.W. 2001. Vibration analysis by discrete singular convolution, Journal of Sound and Vibration, Cilt. 244, s. 535-53. doi:10.1006/jsvi.2000.3507.
- [16] Seçgin, A., Sarigül, A.S. 2009. A novel scheme for the discrete prediction of high-frequency vibration response: Discrete singular convolution-mode superposition approach, Journal of Sound and Vibration, Cilt. 320, s. 1004-22. doi:10.1016/j.jsv.2008.08.031.
- [17] Seçgin, A., Sarigül, A.S. 2008. Free vibration analysis of symmetrically laminated thin composite plates by using discrete singular convolution (DSC) approach: Algorithm and verification, Journal of Sound and Vibration, Cilt. 315, s. 197-211. doi:10.1016/j.jsv.2008.01.061.
- [18] Rao, S.S. 2011. Mechanical vibrations. Prentice Hall.
- [19] Wei, G.W, Zhao, Y.B., Xiang, Y. 2002, Discrete singular convolution and its application to the analysis of plates with internal supports, Part 1: Theory and algorithm, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Cilt. 55, s. 913-46. doi:10.1002/nme.526.
- [20] Wang, X, Xu, S. 2010. Free vibration analysis of beams and rectangular plates with free edges by the discrete singular convolution, Journal of Sound and Vibration, Cilt.

M. Kara vd. / İnce Bir Çubuğun Belirsiz Doğal Frekanslarının Çokterimli Kaos Açılımı ile Matematiksel Olarak Modellenmesi

329, s. 1780-92.  
doi:10.1016/j.jsv.2009.12.006.

- [21] Zhao, S., Wei, G.W., Xiang, Y. 2005. DSC analysis of free-edged beams by an iteratively matched boundary method, Journal of Sound and Vibration, Cilt. 284, s. 487-93. doi:10.1016/j.jsv.2004.08.037.